

## การทบทวนบทความโครงสร้างที่มีรอยร้าวโดยใช้การวิเคราะห์การสั่น

### Review of Cracked Structures using Vibration Analysis

ณัฐพงศ์ คุณละ<sup>1)</sup> รังสรรค์ วรรณภพ<sup>2)</sup> และ ชีร เจียรศิริพงษ์กุล<sup>3)</sup>

Nutthapong Kunla<sup>1)</sup> Rangsn Wannapop<sup>2)</sup> and Thira jeersiripongkul<sup>3)</sup>

<sup>1)</sup>ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ จังหวัดปทุมธานี 12120

<sup>2)</sup>ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ศูนย์พัทยา

<sup>3)</sup>ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ จังหวัดปทุมธานี 12120

### บทคัดย่อ

รอยร้าวในชิ้นส่วนต่าง ๆ ของโครงสร้างทำให้เกิดความเสียหายลุกลามกลายเป็นความเสียหายขนาดใหญ่ถ้าไม่มีการซ่อมแซมในส่วนรอยร้าว การตรวจสอบความเสียหายของชิ้นส่วนของโครงสร้างโดยใช้การสั่นเป็นวิธีการตรวจสอบแบบไม่ทำลาย วิธีการระบุรอยร้าวบนชิ้นส่วนโครงสร้างโดยการวิเคราะห์การสั่นอยู่บนหลักการที่ว่ารูปแบบการเคลื่อนที่ของชิ้นงานที่เกิดการสั่นเป็นฟังก์ชันของคุณสมบัติทางฟิสิกส์ของชิ้นส่วน โครง ดังนั้นการเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติทางฟิสิกส์เป็นสาเหตุทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงรูปแบบการเคลื่อนที่ของชิ้นงานที่เกิดการสั่น จุดประสงค์ของบทความนี้คือการทบทวนสรุปขั้นตอนวิธีการระบุรอยร้าวบนโครงสร้างที่เป็นแบบคานและแผ่นบางโดยการวิเคราะห์การสั่น เพื่อช่วยเป็นจุดเริ่มต้นของนักวิจัยที่ค้นคว้าเกี่ยวกับการระบุความเสียหายโดยการวิเคราะห์การสั่นและเป็นแนวทางให้นักวิจัยเข้าใจเกี่ยวกับขั้นตอนของวิธีการระบุความเสียหายบนโครงสร้างที่เป็นแบบคานและแผ่นบาง บทความนี้ได้จัดแบ่งหมวดหมู่วิธีการระบุความเสียหายพื้นฐานวิธีการที่ใช้ระบุความเสียหาย ซึ่งแบ่งออกได้เป็น 3 วิธี ได้แก่ วิธีการที่ตั้งอยู่บนพื้นฐานค่าความถี่ วิธีการที่ตั้งอยู่บนรูปแบบการเคลื่อนที่ของชิ้นงานที่เกิดจากการสั่น และวิธีการที่ตั้งอยู่บนความโค้งงอของรูปแบบการเคลื่อนที่ของชิ้นงานที่เกิดจากการสั่น

คำสำคัญ : การสั่นของคาน, การสั่นของแผ่นบาง, การทบทวนบทความการสั่น, การระบุความเสียหายโดยการสั่น

### Abstract

Cracks are in structural components that may ultimately lead to failure of structures if not repaired. Crack identification in structures components using vibration response is non-destructive crack identification method. The methods are based on the fact that motion configuration of system vibrating is a function of the physical properties of the structure. Therefore, changes in the physical properties will cause detectable changes in the motion configuration of system vibrating. The aim of the present study is to provide a summary review on damage identification algorithms to help researchers in identifying starting points for research in vibration-based damage identification and to guides researchers understand in damage identification algorithm for beam-type or plate-type structures. The review is organized by the classification based on the features extracted for damage identification, the damage identification methods are classified into three major categories: natural frequency-based methods, motion configuration of system vibrating - based methods, curvature motion configuration of system vibrating based methods.

**Key word** : beam vibration, plate vibration, vibration review, vibration damage identification

### 1. บทนำ (Introduction)

ชิ้นส่วนของเครื่องจักรในอุตสาหกรรม เช่น เพลลา ใบพัด เครื่องบิน ทำหน้าที่รับแรงและส่งแรงที่แตกต่างกันตามหน้าที่

การใช้งาน ซึ่งแรงที่กระทำกับชิ้นส่วนเครื่องจักรต่าง ๆ นี้ มีผลทำให้ชิ้นส่วนของเครื่องจักรเกิดรอยร้าวแล้วขยายรอยขนาดใหญ่อันทำให้เกิดความเสียหายในชิ้นส่วนของเครื่องจักร

ความเสียหายในชิ้นส่วนต่าง ๆ ของเครื่องจักรกลที่เกิดจากภาระทางกล โดยอยู่ภายใต้แรงที่เปลี่ยนแปลง (Dynamics Load) ทำให้เกิดความเค้น (Stress) กับชิ้นส่วนเครื่องจักรและเมื่อชิ้นส่วนเครื่องจักรรับภาระกระทำซ้ำไปซ้ำมา (Repeated Cycling of the Load) ทำให้วัสดุเกิดความล้าทำให้ชิ้นส่วนเครื่องจักรเกิดการร้าว (Crack) ขึ้นซึ่งเป็นความเสียหายขั้นแรกและเมื่อรอยร้าวได้รับภาระที่กระทำซ้ำ ๆ กันไปเป็นเวลานานทำให้รอยร้าวในคอนกรีตขยายเป็นรอยร้าวที่ใหญ่ขึ้นและพังเสียหายในที่สุด ตัวอย่างอุปกรณ์ที่เกิดความเสียหายแล้วนำไปสู่อุบัติเหตุที่ร้ายแรงได้แก่ การเกิดระเบิดของ Boiler ที่มีสาเหตุเริ่มต้นมาจากรอยร้าวใน Boiler ซึ่งโดยปกติแล้ว Boiler ทำงานภายใต้สภาวะที่แรงดันสูง ที่อุณหภูมิ Superheat ซึ่งทำให้เกิดความเค้นภายในวัสดุ เมื่อ Boiler เกิดความเค้นเป็นเวลานานทำให้เกิดการร้าวขึ้น ที่ตำแหน่งรอยร้าวยังคงเกิดความเค้นเนื่องจากแรงดันไอน้ำและอุณหภูมิ ทำให้อุณหภูมิสูงขึ้นจนเกิดเป็นความเสียหายขนาดใหญ่และส่งผลกระทบต่อการทำงานของ Boiler

เพื่อให้ชิ้นส่วนโครงสร้างสามารถใช้งานได้มีประสิทธิภาพและปลอดภัยสำหรับผู้ใช้งาน ได้มีความพยายามคิดค้นวิธีการตรวจสอบหารอยร้าวของชิ้นส่วนโครงสร้างแบบที่ไม่ทำลายหรือที่เรียกว่า Non-destructive test ซึ่งมีหลายวิธีการ เช่น วิธีการใช้คลื่นความถี่สูง (Ultrasonic Testing : UT) วิธีการถ่ายภาพรังสี (Radiographic Test : RT) วิธีการ Eddy current ซึ่งวิธีการเหล่านี้ยังมีข้อจำกัดในการใช้งาน ไม่สามารถทำได้ในโครงสร้างขนาดใหญ่และมีค่าใช้จ่ายสูงมาก

แนวคิดเกี่ยวกับการตรวจสอบความเสียหายที่เกิดขึ้นบนโครงสร้าง โดยใช้หลักการการเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติทางพลศาสตร์ ความเสียหายในโครงสร้างทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติทางฟิสิกส์ เช่น Stiffness มวล และการกระจายพลังงานของระบบ ซึ่งทำให้มีการเปลี่ยนแปลงค่าความถี่ของการสั่น

วิธีการตรวจสอบรอยร้าวโดยการวิเคราะห์การสั่นได้มีการเริ่มต้นตั้งแต่ ช่วง ปี ค.ศ. 1970s โดยนักวิจัยด้านอวกาศ และ นักวิจัยด้านการขุดเจาะน้ำมัน ต่อมาได้แพร่หลายไปสู่อุตสาหกรรมด้านอื่น ๆ ต่อมา Dimarogonus [1] ได้พัฒนาทฤษฎีการสั่นของเพลารอยร้าวได้ถูกนำไปขยายผลใช้กับคาน และแผ่นบาง

Rytter [2] ได้จัดหมวดหมู่วิธีการระบุความเสียหายออกเป็น 4 ระดับ และวิธีการระบุรอยร้าวในชิ้นส่วนของโครงสร้างโดยวิธีการวิเคราะห์การสั่นถูกจัดอยู่ในวิธีการที่อยู่ใน Level 1 และ Level 2 ซึ่งเป็นวิธีการที่สามารถระบุการมีอยู่ของความเสียหายและตำแหน่งของความเสียหายได้

จุดประสงค์ของบทความนี้คือการทบทวนสรุปขั้นตอนวิธีการระบุรอยร้าวบนโครงสร้างที่เป็นแบบคานและแผ่นบาง โดยการวิเคราะห์การสั่น เนื่องจากว่า เพื่อช่วยเป็นจุดเริ่มต้นของผู้ทำวิจัยที่ค้นคว้าเกี่ยวกับการระบุความเสียหายโดยการวิเคราะห์การสั่นและเป็นแนวทางให้นักวิจัยเข้าใจถึงขั้นตอนของวิธีการระบุความเสียหายบนโครงสร้างที่เป็นแบบคานและแผ่นบาง

## 2. การทบทวนบทความ (Literature Review)

การตรวจสอบโดยไม่ทำลาย (Nondestructive Test หรือ NDT) เป็นการทดสอบคุณสมบัติ และตรวจสอบว่ามีความบกพร่องในวัสดุหรือ โครงสร้าง โดยไม่ก่อให้เกิดความเสียหายต่อรูปร่าง การทดสอบใช้หลักการของสมบัติทางฟิสิกส์ สามารถแบ่งประเภทของการตรวจสอบแบบไม่ทำลายออกเป็น 2 ประเภท ดังนี้

- การตรวจสอบความบกพร่องภายใน
- การตรวจสอบความบกพร่องภายนอก

### 2.1 การตรวจสอบความบกพร่องภายใน

วิธีการ NDT ใช้ในการตรวจสอบภายใน ที่เป็นที่ทราบกันดี มีอยู่ 2 วิธีคือ

- วิธีการถ่ายภาพรังสี (Radiographic Testing)
- วิธีการคลื่นเสียงความถี่สูง (Ultrasonic Testing)

วิธีการถ่ายภาพรังสี เป็นการทดสอบโดยการปล่อยคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีความถี่สูงจากแหล่งกำเนิดรังสีผ่านชิ้นงานอาศัยหลักการดูดซับพลังงานที่ไม่เท่ากันของวัสดุหรือการที่วัสดุมีความหนาแน่นไม่เท่ากัน เช่นมีโพรงอากาศอยู่ภายในทำให้พลังงานของรังสีผ่านชิ้นงานตรงบริเวณที่เป็นโพรง ได้มากกว่า และทำปฏิกิริยากับสารไวแสงที่เคลือบอยู่บนฟิล์มได้มากกว่าส่วนอื่น เมื่อล้างฟิล์มออกมาแล้วก็มีสีคล้ำกว่าบริเวณอื่น ในช่วงแรกๆ ได้มีการนำวิธีการนี้ตรวจสอบรอย

ร้าวของเหล็กที่นำมาทำรางรถไฟ ตรวจสอบรอยเชื่อม และตรวจสอบความเสียหายของโครงสร้าง Sandwich structure ในส่วนของ Honeycomb เนื่องจากวิธีการถ่ายภาพรังสีต้องใช้ผู้เชี่ยวชาญในการตรวจสอบฟิล์ม เพื่อการตรวจสอบฟิล์มง่ายขึ้น ได้มีการพัฒนานำหลักการ fuzzy มาใช้ในการวิเคราะห์ฟิล์มที่ได้จากการถ่ายภาพรังสี Sun Z, Ruan D, Ma Y, Hu X และ Zhang X-g [3] นำหลักการ fuzzy ร่วมกับ Beamlet transform เพื่อตรวจสอบความเสียหายของรอยเชื่อม วิธีการนี้ได้นำข้อมูลที่ได้จากการถ่ายภาพรังสี แล้วนำหลักการ fuzzy ร่วมกับ Beamlet transform ทำการวิเคราะห์ความเสียหาย ต่อมาได้มีการเปลี่ยนฟิล์มที่ได้จากการถ่ายภาพรังสีอยู่ในรูปดิจิทัล Nacereddine N, Zelmat M, Belaiifa SS และ Tridi M [4] ได้ใช้วิธีการ image processing เปลี่ยนข้อมูลที่อยู่ในรูปของฟิล์มให้เป็นระบบดิจิทัลทำการตรวจสอบรอยร้าวของรอยเชื่อม Wong BS, Wang X, Koh CM, Tui CG, Tan C และ Xu J [5] ได้ใช้วิธีการ image processing เปลี่ยนข้อมูลที่อยู่ในรูปของฟิล์มให้เป็นระบบดิจิทัล ทำการตรวจสอบรอยร้าวบนปีกเครื่องบิน

วิธีการคลื่นเสียงความถี่สูง หลักการของวิธีการนี้คือวิธีการทดสอบโดยอาศัยคลื่นเสียงความถี่สูงที่มนุษย์ไม่สามารถได้ยิน (คลื่นเสียงอัลตราโซนิกเป็นคลื่นเสียงที่มีความถี่สูงกว่า 20,000 เฮิร์ต) เสียงเดินทางในของแข็งเร็วกว่าในอากาศหรือก๊าซ เนื่องจากโมเลกุลอยู่ชิดกันมากกว่า เมื่อเสียงเคลื่อนที่ผ่านตัวกลางที่เป็นของแข็งที่เป็นเนื้อเดียวกัน (Homogeneous Solids) ความเข้มของเสียงจะลดลงไม่มากนัก แต่ถ้าเสียงผ่านรอยร้าวทำให้เกิดความไม่ต่อเนื่อง (Discontinuities) ในเนื้อวัสดุ รอยร้าวที่มีขนาดประมาณเท่ากับความยาวคลื่นหรือใหญ่กว่า เสียงจะเกิดการสะท้อน (Reflect) หรือถูกดูดกลืนโดยรอยความไม่ต่อเนื่องนั้น

วิธีการคลื่นเสียงความถี่สูง ถูกนำมาใช้ตั้งแต่ช่วงปี ค.ศ. 1950s Silk, M [10] ได้ใช้คำ ultrasonic surface waves ที่ได้จากการทดลองคำนวณความลึกของรอยร้าว Daponte, P., F. Maceri, และ R. Olivito [11] ได้ใช้วิธีการคลื่นเสียงความถี่สูงระบุความเสียหายในคอนกรีต Mouritz, A., C. Townsend, และ M.S. Khan [12] ได้ใช้วิธีการคลื่นเสียงความถี่สูงเพื่อระบุความเสียหายบนโครงสร้าง composite

## 2.2 การตรวจสอบความบกพร่องภายนอก

- วิธีการใช้สารแทรกซึม (Penetrant Test)

- วิธีการวิธีการ กระแสวน (Eddy Current Test)

- อนุภาคแม่เหล็ก (Magnetic Particle Test)

วิธีการใช้สารแทรกซึม (Penetrant Test) หลักการของวิธีการ คือ การใช้สารเคมีแทรกซึมลงในรอยร้าวเพื่อระบุตำแหน่งของรอยร้าว เป็นวิธีการหารอยบกพร่องหรือความไม่ต่อเนื่องที่เปิดสู่ผิว สามารถทดสอบกับวัสดุทุกชนิดที่ไม่เป็นรูพรุน เช่น แก้ว พลาสติก เซรามิก โลหะ อโลหะ เป็นต้น การทดสอบโดยวิธีการนี้อาศัยหลักของปฏิกิริยาแทรกซึม (Capillary action) ซึ่งเป็นปรากฏการณ์ตามธรรมชาติโดยการทาหรือพ่นของเหลวซึมที่มีคุณสมบัติแทรกซึมเข้าไปในรอยร้าวหรือรูเล็ก ๆ ได้ดีจากนั้นใช้สารเคมีหรือน้ำยาที่มีคุณลักษณะคล้ายกระดาษซับ ฟันหรือโรยตรงบริเวณที่ต้องการทดสอบ หากมีรอยแตกร้าวหรือรอยบกพร่องใด ๆ บนผิวงาน จะเกิดเป็นเส้นหรือแนวของสารซึมสีให้เห็นอย่างเด่นชัด การทดสอบโดยวิธีการแทรกซึมมีทั้ง แบบที่เห็นด้วยตาเปล่า (color contrast) และแบบที่ต้องทำในห้องมืดโดยใช้แสง Black Light (Fluorescent)

วิธีการ กระแสวน (Eddy Current Test) หลักการของวิธีการนี้ คือการใช้สนามแม่เหล็กเหนี่ยวนำให้เกิดกระแสไหลวนในชิ้นงานทดสอบ ทำให้เกิดกระแสไหลวนบนชิ้นงานทดสอบ และสังเกตค่า Impedance ของหัวทดสอบที่เปลี่ยนแปลง ซึ่งเป็นผลมาจากกระแสไหลวนบนชิ้นงานที่เปลี่ยนแปลง เนื่องจากความแตกต่างของคุณสมบัติ รอยร้าวทำให้เกิดความไม่ต่อเนื่องที่อยู่ในวัสดุ โดยสามารถทดสอบวัสดุที่เป็นตัวนำไฟฟ้าได้เท่านั้น โดยที่ตำแหน่งรอยร้าว มีค่า electrical conductivity ต่างไปจากเนื้อโลหะ ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงของ electromagnetic field

วิธีการกระแสวน (Eddy Current Test) ได้ถูกนำมาใช้ตั้งแต่ช่วงปี ค.ศ. 1950s โดยใช้ในการตรวจสอบความเสียหายในชิ้นส่วนของเครื่องบิน ท่อน้ำ ถึงความดัน และนำมาใช้ในอุตสาหกรรมรถยนต์ ในประเทศรัสเซียและประเทศยูเครน ได้นำวิธีการกระแสวนไปใช้ในการตรวจสอบรอยร้าวของรางรถไฟ Spancer [7] ได้ใช้วิธีการกระแสวนระบุตำแหน่งรอยร้าวบนชิ้นส่วนของเครื่องบิน ซึ่งพบว่าขนาดรอยร้าวใกล้ที่เล็กที่สุดที่วิธีการนี้สามารถตรวจพบมีขนาด 0.04 Uchanin V, Lutchenko G, Dshaganjan A และ Nikonenko [8] นำวิธีการกระแสวนตรวจสอบรอยร้าวของเหล็กหล่อที่มีการตกแต่งผิว

ให้เรียบ He Y, Tian G, Pan M และ Chen D [9] ได้มีการนำวิธีการกระแสวนใช้ในการตรวจสอบความเสียหายในชิ้น sandwich structure

วิธีการอนุภาคแม่เหล็ก (Magnetic Particle Test) หลักการของวิธีการคือการสร้างสนามแม่เหล็กในชิ้นงาน หากพบรอยแตกร้าวขนาดเล็กบนผิวชิ้น งานบริเวณดังกล่าวจะปรากฏเป็นผงเหล็กให้เกาะกันเป็นแนวเส้นตามรอยร้าวเนื่องจากผงเหล็กไม่สามารถกระโดดข้ามผ่านรอยแตกร้าวไปตามเส้นแรงแม่เหล็ก

วิธีการอนุภาคแม่เหล็ก (Magnetic Particle Test) ถูกค้นพบโดยบังเอิญโดย Hoke ในปี ค.ศ. 1918 และตั้งแต่ ค.ศ. 1960s เป็นต้นมา วิธีการอนุภาคแม่เหล็กถูกนำมาใช้อย่างกว้างขวางเพื่อการระบุความเสียหายของท่อ Förster, F [6] ได้นำเสนอหลักการการใช้วิธีการอนุภาคแม่เหล็กเพื่อระบุตำแหน่งรอยร้าว และเสนอวิธีการคำนวณการระบุตำแหน่งรอยร้าวที่ใช้หลักการอนุภาคแม่เหล็กโดยใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์ เพื่อให้ได้คำตอบที่แม่นยำ Lukyanets S, Snarskii A, Shamonin M และ Bakaev V [7] กำหนดค่า Magnetic leakage field จาก

ขนาดของพื้นผิวที่เสียหาย Kim HM, Yoo HR, Rho YW และ Park GS [8] ได้ใช้วิธีการอนุภาคแม่เหล็กตรวจสอบรอยร้าวของท่อที่อยู่ใต้ดิน

วิธีการตรวจสอบแบบไม่ทำลายที่ได้กล่าวมามีข้อจำกัดในการใช้งานซึ่งสามารถสรุปข้อจำกัดการทำงานของแต่ละวิธีในตารางที่ 1

จากข้อจำกัดของวิธีการที่กล่าวมาทำให้มีการนำวิธีการตรวจสอบความเสียหายโดยการวิเคราะห์การสั่นซึ่งเป็นวิธีการตรวจสอบโดยไม่ทำลายที่คนส่วนใหญ่ยังไม่รู้จัก ข้อดีของวิธีการนี้คือ สามารถตรวจสอบชิ้นงานขนาดใหญ่ วิธีการนี้ไม่จำเป็นต้องเข้าถึงชิ้นงานทั้งสองด้าน ใช้พื้นที่เล็กน้อยในการติดตั้งชุด sensor เก็บข้อมูลการสั่น สามารถตรวจสอบชิ้นงานได้ทุกชนิด หลักการของวิธีการนี้คือ ความเสียหายในโครงสร้างทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติทางฟิสิกส์ ซึ่งทำให้เกิดการเปลี่ยนรูปร่างของโหมดการสั่น และในบทความนี้ได้เน้นนักการทบทวนวิธีการระบุรอยร้าวบนโครงสร้างที่เป็นแบบคานและแผ่นบางโดยการวิเคราะห์การสั่น

ตาราง 1 ข้อจำกัดของวิธีการตรวจสอบความเสียหาย

วิธีการระบุตำแหน่งรอยร้าว	ข้อจำกัดของวิธีการ
วิธีการถ่ายภาพรังสี (Radiographic Testing)	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. ต้องเข้าถึงตำแหน่งรอยร้าวทั้งด้านบนและด้านล่างจึงสามารถระบุรอยร้าวได้</li> <li>2. ไม่สามารถระบุรอยร้าวได้เมื่อรอยร้าวตั้งฉากกับทิศทางการฉายรังสี</li> <li>3. ไม่สามารถตรวจสอบชิ้นงานขนาดใหญ่ได้</li> <li>4. ไม่สามารถตรวจสอบชิ้นงานที่มีความหนาแน่นมาก ๆ</li> <li>5. ต้องใช้ผู้เชี่ยวชาญในการวิเคราะห์แผ่นฟิล์ม</li> <li>6. วิธีการเป็นวิธีการที่มีความเสี่ยงต่อผู้ทำการทดสอบ</li> </ol>
วิธีการคลื่นเสียงความถี่สูง (Ultrasonic Testing)	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. ชิ้นงานที่มีผิวขรุขระ ชิ้นงานบาง</li> <li>2. ต้องใช้ผู้เชี่ยวชาญในการตรวจสอบ</li> </ol>
วิธีการใช้สารแทรกซึม (Penetrant Test)	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. ไม่สามารถตรวจข้อบกพร่องหรือรอยร้าวภายในชิ้นงานได้</li> <li>2. ไม่สามารถตรวจสอบบริเวณที่เข้าไม่ถึงได้</li> <li>3. พื้นผิวที่ทดสอบต้องเรียบพอสมควร</li> <li>4. วิธีการนี้ไม่เหมาะสมสำหรับชิ้นงานมีรูพรุน หรือมีความหนาแน่นต่ำ</li> </ol>
วิธีการวิธีการ กระแสวน (Eddy Current Test)	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. ไม่สามารถตรวจข้อบกพร่องหรือรอยร้าวภายในชิ้นงานได้</li> <li>2. สามารถทดสอบได้กับเฉพาะวัสดุที่เป็นตัวนำไฟฟ้าเท่านั้น</li> <li>3. การแปรผลสัญญาณการทดสอบค่อนข้างซับซ้อนและต้องใช้ทักษะสูง</li> <li>4. ลักษณะพื้นผิวและการสั่นของหัวทดสอบมีผลต่อผลการทดสอบ</li> </ol>
อนุภาคแม่เหล็ก (Magnetic Particle Test)	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. ไม่สามารถตรวจข้อบกพร่องหรือรอยร้าวภายในชิ้นงานได้</li> <li>2. ต้องใช้ผู้เชี่ยวชาญในการวิเคราะห์ ลักษณะผงเหล็กบนชิ้นงานทดสอบ</li> <li>3. หลังจากการทดสอบแล้วชิ้นงาน บางชนิดต้องการปลดการเป็นแม่เหล็กออก (Demagnetizing) และ ต้องทำความสะอาด</li> </ol>

### 3. การวิเคราะห์วิธีการระบุรอยร้าวบนโครงสร้างโดยการวิเคราะห์การสั่น (Content Analysis)

การทบทวนบทความนี้ได้ทำการแบ่งหมวดหมู่วิธีการระบุรอยร้าวบนโครงสร้างที่เป็นแบบคานและแผ่นบางโดยการวิเคราะห์การสั่น โดยพิจารณาจากวิธีการนำมาใช้ในการระบุรอยร้าว ซึ่งสามารถแบ่งวิธีการได้ดังต่อไปนี้

- วิธีการที่ตั้งอยู่บนพื้นฐานค่าความถี่ (Frequency based Methods)
- วิธีการที่ตั้งอยู่บนรูปแบบการเคลื่อนที่ของชิ้นงานที่เกิดการสั่น
- วิธีการที่ตั้งอยู่ตั้งอยู่บนความโค้งงอของรูปแบบการเคลื่อนที่ของชิ้นงานที่เกิดการสั่น

เนื่องจากว่าในตำราทางวิชาเกี่ยวกับเรื่องการสั่นของ Rao, S.S [9] และธีระ เกียรติพิงษ์กุล [10] เรียกรูปแบบการเคลื่อนที่ของชิ้นงานที่เกิดการจากการสั่นแต่ละรูปแบบว่า รูปร่างของโหมดการสั่น ดังนั้นในบทความนี้จึงใช้คำว่า รูปร่างของโหมดการสั่นแทนคำว่ารูปแบบการเคลื่อนที่ของชิ้นงานที่เกิดการสั่น เพื่อให้ตรงกับตำราทางวิชาการที่เกี่ยวกับการสั่น ดังนั้นวิธีการที่ตั้งอยู่บนรูปแบบการเคลื่อนที่ของชิ้นงานที่เกิดการสั่นถูกเรียกว่าวิธีการวิธีการที่ตั้งอยู่บนรูปร่างของโหมดการสั่น (Mode Shape based-Methods) และวิธีการที่ตั้งอยู่ตั้งอยู่บนความโค้งงอของรูปแบบการเคลื่อนที่ของชิ้นงานที่เกิดการสั่นถูกเรียกว่าวิธีการวิธีการที่ตั้งอยู่บนรูปร่างของโหมดที่เกี่ยวกับความโค้ง (Curved Mode Shape based-Methods)

#### 3.1 วิธีการที่ตั้งอยู่บนพื้นฐานค่าความถี่

วิธีการระบุความเสียหายโดยการใช้วิธีการที่ขึ้นอยู่กับพื้นฐานค่าความถี่ใช้หลักการการเปลี่ยนแปลงค่าความถี่ของโครงสร้าง คาน และแผ่นบางซึ่งเป็นวิธีการที่สะดวกในการระบุความเสียหาย วิธีการนี้แบ่งออกเป็น 2 แบบ คือ

##### 3.1.1 ปัญหาที่ไปข้างหน้า หรือปัญหาปกติ (The Forward Problem)

วิธีการนี้เป็นการคำนวณค่าความถี่ของการสั่นเมื่อทราบตำแหน่งของรอยร้าว ซึ่งวิธีการนี้ได้มีการศึกษาดังต่อไปนี้

T.G. Chondros และ A.D. Dimarogonas [11] ใช้หลักการของ Rayleigh สำหรับการประมาณการเปลี่ยนแปลงความถี่ธรรมชาติของการสั่นและโหมดของการสั่นของโครงสร้างเมื่อทราบรูปร่างของรอยร้าว โดยที่หลักการสำคัญของ Rayleigh คือการใช้ฟังก์ชันเฉพาะที่ โดยแบ่งชิ้นงานออกเป็น ส่วนๆ (element) สมการการเคลื่อนที่ในกรณีการสั่นแบบอิสระ เขียนได้ดังนี้

$$M\ddot{x} + Kx = 0 \quad (1)$$

- โดยที่
- $M$  = Mass Matrix
  - $K$  = Stiffness Matrix
  - $x$  = eigenvector
  - $\ddot{x}$  = อนุพันธ์อันดับ 2 ของ eigenvector

วิธีการนี้สามารถใช้ Flexibility Matrix สำหรับรอยร้าวที่หาได้จาก G. Gounaris และ A. Dimarogonas [12] ทำการคำนวณค่าความถี่ธรรมชาติโดยใช้วิธีการ Rayleigh ที่มีการสมมติว่า ปัญหา eigenvalue สำหรับโครงสร้างที่ไม่มีรอยร้าวได้ถูกหาคำตอบ โดยหลักการของ Rayleigh เขียนได้ดังนี้

$$\lambda_i = \frac{x_i^T K x_i}{x_i^T M x_i} = \omega^2 \quad (2)$$

- โดยที่
- $\lambda_i$  = ผลหารของ Rayleigh
  - $\omega^2$  = ความถี่ของ Rayleigh
  - $i, j$  = ดัชนีระบุเอลิเมนต์

เมื่อ Stiffness Matrix เปลี่ยนแปลงทำให้ผลหารของ Rayleigh เปลี่ยนแปลงดังนี้

$$\Delta\lambda_i = \frac{x_i^T \Delta K x_i}{x_i^T M x_i} = \omega^2 \quad (3)$$

โดยที่  $\Delta\lambda_i$  คือ การเปลี่ยนแปลงผลหารของ Rayleigh เนื่องจาก stiffness Matrix เปลี่ยนแปลง  $\Delta K$  สมการที่ (3) ถูกใช้ในการคำนวณค่าความถี่ธรรมชาติของคานที่มีรอยร้าว ซึ่งช่วยลดความยุ่งยากในการคำนวณเพื่อหาคำตอบ EigenValue ของโครงสร้างที่มีรอยร้าว ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างพบว่าความถี่

ธรรมชาติมีค่าผิดพลาดสูงสุดร้อยละ 5 เมื่อเทียบกับวิธีการคำนวณแบบแมน่ตรง

W.M. Ostachowicz และ M. Krawczuk [13] ได้คำนวณค่าความถี่ธรรมชาติของการสั่นของคานายื่นที่มีรอยร้าว โดยการใช้สมการเคลื่อนที่ของคานาที่หาโดย Euler – Bernoulli รอยร้าวที่อยู่บนคานามี 2 แบบ คือ แบบที่มีรอยร้าวทั้ง 2 ด้านของคานา และแบบที่มีรอยร้าวด้านเดียวบนคานา และแทนตำแหน่งรอยร้าวด้วย Spring Constant โดยสมมติรอยร้าวเป็นแบบเปิด ที่มี Stress Intensity Factor เป็นแบบโมเมนต์ตัด ทำให้ได้ Flexibility ของคานาที่มีรอยร้าวทั้งสองด้านของคานา และทำให้ได้ค่า stiffness ที่นำเสนอโดย Haisty, B [14] โดยอาศัยเงื่อนไขขอบ สมการ Compatibility ที่ตำแหน่งรอยร้าว ทำให้ได้สมการ Characteristic และถูกใช้ในการคำนวณค่าความถี่ธรรมชาติของการสั่นของคานายื่น (Cantilever) ที่มีรอยร้าว ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณ ในกรณีที่มีคานามีรอยร้าวอยู่บนด้านเดียวของคานา และมีรอยร้าว 2 แห่งบน เมื่อมีความลึกของรอยร้าวทั้ง 2 ตำแหน่งเท่ากัน ค่าความถี่ธรรมชาติของการสั่นที่มีค่าลดลงมากขึ้นเมื่อตำแหน่งรอยร้าวอยู่ใกล้กัน และเมื่อตำแหน่งรอยร้าวทั้ง 2 แห่ง อยู่ห่างกันมากขึ้นค่าความถี่ธรรมชาติของการสั่นของคานามีค่าใกล้เคียงค่าความถี่ธรรมชาติของการสั่นของคานาที่มี 1 รอยร้าว เมื่อความลึกของรอยร้าวทั้ง 2 แห่งบนคานามีค่าต่างกัน รอยร้าวที่มีความลึกมากกว่ามีผลกระทบต่อค่าความถี่ธรรมชาติของการสั่น สำหรับในกรณีที่คานามีรอยร้าวอยู่ทั้ง 2 ด้านบนคานามีผลให้ความถี่ธรรมชาติของการสั่นที่มีค่าลดลงเล็กน้อยเมื่อเทียบกับคานาที่มีรอยร้าวด้านเดียวกัน เมื่อความลึกเท่ากัน

Guan-Liang Qian, Song-Nian Gu และ Jie-Sheng Jiang [15] ได้คำนวณค่าความถี่ธรรมชาติของการสั่นของแผ่นบางที่มีรอยร้าว โดยการใช้วิธีการทางไฟไนต์เอลิเมนต์ โดย Stiffness Matrix ของเอลิเมนต์รอยร้าวได้จาก Stress Intensity Factor ที่เกิดจากโมเมนต์ตัด และ Twisting Moment ลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณมีค่าใกล้เคียงกับผลลัพธ์ที่ได้จากการทดลองโดยมีค่าสูงกว่าผลลัพธ์ที่ได้จากการทดลอง

M. Krawczuk [16] ได้ใช้วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์คำนวณค่าความถี่ธรรมชาติของการสั่นการสั่นของแผ่นบางที่มีรอยร้าวที่ถูกกระทำด้วยแรง 5 แรง โดยที่ ได้มีการเพิ่มผลของ Stress Intensity Factor ที่เกิดจากรอยร้าว เข้าไปในส่วนของ Stiffness Matrix ของรอยร้าวโดยที่ Flexibility Matrix ของเอลิเมนต์ของแผ่นบางในกรณีที่ มีรอยร้าว หาได้จากความสัมพันธ์ที่เสนอโดย Paipetis, S. and A. Dimarogonas [17] ค่าความถี่ธรรมชาติของคานาที่มีรอยร้าวที่คำนวณได้ถูกนำไปเปรียบเทียบกับผลลัพธ์ของ Christides, S. และ A. Barr [18]

และผลลัพธ์ของ Shen, M.-H. และ C. Pierre [19] พบว่าเมื่อค่าความถี่ธรรมชาติที่คำนวณของคานาที่มีค่า Slender (L/h) มาก ผลลัพธ์ที่ได้ใกล้เคียงกับผลของ Christides, S. และ A. Barr แต่เมื่อคานามีค่า Slender (L/h) น้อยผลลัพธ์ที่ได้มีค่าใกล้เคียงกับผลลัพธ์ของ Shen, M.-H. และ C. Pierre

Han-Ik Yoon, In-Soo Son และ Sung-Jin Ahn [20] ได้ทำการระบุตำแหน่งรอยร้าวบนคานาแบบ Euler – Bernoulli ที่มีภาระรองรับอย่างง่าย (Simple Supported Beam) ที่มีรอยร้าว 2 ตำแหน่ง โดยแทนตำแหน่งรอยร้าวด้วย Rotation Spring โดยพิจารณาเป็นการสั่นแบบตัด (Bending vibration) เพียงอย่างเดียว สมการการเคลื่อนที่ของคานาหาได้จาก พลังงานจลน์ พลังงานศักย์ และพลังงานความเครียด โดยอาศัยหลักการของ Hamilton ทำให้ได้สมการการเคลื่อนที่ของคานาดังนี้

$$M\ddot{x} + Kx = 0 \quad (4)$$

Mass Matrix (M) หาได้จากสมการพลังงานจลน์ Stiffness Matrix (K) ได้สมการพลังงานความเครียด และสมการพลังงานศักย์ได้จากความสัมพันธ์ระหว่าง Strain Energy ที่เป็นฟังก์ชันของ Stress Intensity Factor ที่นำเสนอโดย G. Gounaris และ A. Dimarogonas [12] และใช้หลักการเดียวกับ Rizos, P., N. Aspragathos และ A. Dimarogonas [21] หาตำแหน่งรอยร้าวและความลึกของรอยร้าว ผลลัพธ์ที่ได้พบว่าค่าความถี่ธรรมชาติของการสั่นของคานา มีค่าแตกต่างสูงสุดจากการทดลองจริงร้อยละ 3.73 และพบว่าค่าความถี่ธรรมชาติของการสั่นของคานาขึ้นอยู่กับตำแหน่งและความลึกของรอยร้าว

Asif Israr [22] ได้คำนวณค่าความถี่ธรรมชาติของการสั่นของแผ่นที่มีรอยร้าวที่ตำแหน่งตรงกลางแผ่นในโหมดที่ 1 โดยใช้สมการที่ได้จาก Timoshenko, S.P. และ S. Woinowsky-Krieger [23] โดยไม่พิจารณาผลกระทบของโมเมนต์ความเฉื่อย (Rotary Inertia) และแรงเฉือนที่ด้านความหนา ผลลัพธ์ที่ได้มีค่าใกล้เคียงกับงานวิจัยของ Stahl, B. และ L. Keer [24] และ Ostachowicz, W. และ M. Krawczuk [13] โดยที่ค่าตอบที่จากวิธีการนี้มีค่าสูงกว่า Stahl, B. และ L. Keer [24] และ Ostachowicz, W. และ M. Krawczuk [13]

P. Yamuna และ K. Sambasivarao [25] คำนวณค่าความถี่ธรรมชาติของการสั่นของคานาที่มีการรองรับอย่างง่ายที่มีของรอยร้าว โดยการใช้โปรแกรม ANSYS ผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์การสั่นพบว่าค่าความถี่ธรรมชาติของการสั่นไม่ได้ขึ้นอยู่กับตำแหน่งของรอยร้าวและความลึกของรอยร้าวเท่านั้น แต่ยังขึ้นอยู่กับโหมดของการสั่นด้วย

2.1.1 ปัญหาแบบผกผัน (The Inverse Problem)

วิธีการนี้เป็น เป็นการคำนวณตำแหน่งรอยร้าวเมื่อทราบค่าความถี่ของการสั่น ซึ่งวิธีการนี้ได้มีการศึกษาดังต่อไปนี้

T. G. Chondros และ A. D. Dimarogonas [26] ได้ทำการทดลองการสั่นของคานแบบยื่นเพื่อที่หาค่าความสัมพันธ์ระหว่างการเปลี่ยนแปลงความถี่ธรรมชาติของคานกับความถี่ของรอยร้าวบนคานสำหรับนำไปใช้ระบุตำแหน่งรอยร้าวบนคานได้

จากการทดลองพบว่าความสัมพันธ์ความถี่ธรรมชาติของการสั่นของคานที่มีรอยร้าว ( $\omega_n$ ) กับความถี่ธรรมชาติของการสั่นของคานที่ไม่มีรอยร้าว ( $\omega_{nc}$ ) เขียนอยู่ในรูปสมการได้ดังนี้

$$\omega_n / \omega_{nc} = \frac{1}{(1 + \mu^2)} \quad (5)$$

เมื่อ  $\mu = 3EI / LK_T$

$K_T = 1/c$

$c = (5 \cdot 346h / EI)I(a/h)$

$$I(a/h) = 1.8624(a/h)^2 - 3.95(a/h)^3 + 16.375(a/h)^4 - 37.226(a/h)^5 + 76.81(a/h)^6 - 126.9(a/h)^7 + 66.56(a/h)^{10}$$

เมื่อ  $K_T, E, I, L, a$  และ  $h$  คือ Stiffness torsional spring of constant, Young's modulus, Moment of inertia ความยาวของคาน ความถี่ของรอยร้าวในคานและความสูงของคาน ตามลำดับ

P.F. Rizos, N. Aspragathos และ A.D. Dimarogonas [21] ทำการระบุตำแหน่งและความถี่ของรอยร้าวบนคานยื่นที่เป็นแบบ 1 มิติ โดยการใช้สมการเคลื่อนที่ของคานที่หาโดย Euler – Bernoulli เงื่อนไขขอบเขต สมการสอดคล้องที่ตำแหน่งรอยร้าว และแทนตำแหน่งที่เกิดรอยร้าวบนคานยื่นด้วย Rotational Spring ( $K_T$ ) ที่ได้จากงานวิจัย Paipetis, S. และ A. Dimarogonas [17] ทำให้ได้สมการ Characteristic ทำการหา Determinant ของ Characteristic เท่ากับศูนย์ และได้สมการที่อยู่ในรูปความสัมพันธ์ของความถี่ธรรมชาติของการสั่นและความถี่ของรอยร้าว แทนค่าความถี่ธรรมชาติของการสั่นที่ได้จากการวัดทำให้สามารถระบุตำแหน่งของรอยร้าว ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณมีความผิดพลาดสูงสุดจากการทดลองไม่เกินร้อยละ 8

Y.Bamnios และคณะ [27] ได้ทำระบุตำแหน่งและความถี่ของรอยร้าวบนผิวของคานมีรอยร้าวแบบยื่นที่มีรอยร้าว 1 ตำแหน่ง และคานที่มีการยึดปลายทั้งสองด้านที่มีรอยร้าว 1 ตำแหน่ง ที่ถูกกระทำด้วยแรงแบบ Harmonic และใช้วิธีการเดียวกับ [21] ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้มีความใกล้เคียงกับผลการทดลอง

Y.Narkis [28] ได้พัฒนาวิธีการระบุตำแหน่งรอยร้าวคานที่มีการรองรับอย่างง่าย ที่มีรอยร้าวบนคาน 1 แห่ง โดยการวิเคราะห์ค่าความถี่ธรรมชาติสำหรับการสั่นแบบคด และการสั่นตามแนวแกน (Axial) ของคาน โดยอาศัยเงื่อนไขขอบเขต สมการความสอดคล้อง หาค่าความสัมพันธ์ของค่าความถี่ธรรมชาติของการสั่นของคานที่มีรอยร้าวกับคานที่ไม่มีรอยร้าวเพื่อหาตำแหน่งรอยร้าว โดยค่าความถี่ธรรมชาติของการสั่น 2 ความถี่แรกถูกใช้เพื่อระบุตำแหน่งรอยร้าวในคาน ซึ่งสมการระบุตำแหน่งของคานในการสั่นแบบคด มีความสัมพันธ์ดังนี้

$$(\Delta\omega_2 / \omega_2) / (\Delta\omega_1 / \omega_1) = (1 - \cos 2e\pi) / (1 + \cos e\pi) \quad (6)$$

โดยที่  $e = (L_c - L/2) / L/2$

เมื่อ  $L_c =$  ระยะจากจุดยึดถึงตำแหน่งรอยร้าว

$\omega_1, \omega_2 =$  ค่าความถี่ธรรมชาติของการสั่นแบบคดในโหมดที่ 1 และ 2 ของคานที่ไม่มีรอยร้าว

$\Delta\omega_1, \Delta\omega_2 =$  ค่าผลต่างค่าความถี่ธรรมชาติของการสั่นแบบคดในโหมดที่ 1 และ 2 ของคานที่ไม่มีรอยร้าวกับคานที่มีรอยร้าว

สมการที่ใช้ระบุตำแหน่งของคานในการสั่นตามแนวแกน อยู่ในรูปดังต่อไปนี้

$$(\Delta\omega_{A2} / \omega_{A2}) / (\Delta\omega_{A1} / \omega_{A1}) = (1 + \sin(3e\pi / 2)) / (1 - \sin(e\pi / 2)) \quad (7)$$

เมื่อ

$\omega_{A1}, \omega_{A2} =$  ค่าความถี่ธรรมชาติการสั่นโหมดที่ 1 และ 2 ของการสั่นตามแนวแกน

$\Delta\omega_{A1}, \Delta\omega_{A2} =$  ค่าผลต่างค่าความถี่ธรรมชาติของคานที่ไม่มีรอยร้าวกับคานที่มีรอยร้าวของการสั่นโหมดที่ 1 และ 2 ของการสั่นตามแนวแกน

แล้วทำการทดสอบความแม่นยำของวิธีการระบุตำแหน่งของรอยร้าวโดยใช้ข้อมูลค่าความถี่ของการสั่นของคานที่มีรอยร้าวที่ได้จากจากวิธีการทางไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้โปรแกรม ANSYS

Dimitrina Kindova – Petrova [29] ใช้ค่าความถี่ธรรมชาติ 3 โหมดความถี่แรกระบุตำแหน่งรอยร้าวที่เกิดบนคานที่มีการรองรับอย่างง่ายใช้ความสัมพันธ์ระหว่าง Rotational Spring ที่แทนตำแหน่งของรอยร้าวกับค่าความถี่ธรรมชาติของการสั่นและตำแหน่งของรอยร้าว โดยมีความสัมพันธ์ดังนี้

$$K = \frac{\lambda \left( \frac{\cos(\lambda - 2\lambda L_c) - \cos \lambda}{2 \sin \lambda} \right) + \frac{\lambda \left( \frac{\cosh(\lambda - 2\lambda L_c) - \cosh \lambda}{2 \sinh \lambda} \right)}{2} \quad (8)$$

โดยที่

$$\lambda = \frac{\rho AL^4}{EI} \omega^2$$

$$\lambda_{uc} = \frac{\rho AL^4}{EI} \omega_{uc}^2$$

$$E_{eff} = \frac{\rho A}{I} (\omega_{uc})^2 \left( \frac{L}{\lambda_{uc}} \right)$$

$$K = K_r L / (E_{eff} I)$$

จากสมการสามารถระบุตำแหน่งรอยร้าวได้ 2 วิธี ได้แก่ วิธีการเขียนกราฟ  $K_r$  และ  $L_c$  และวิธีการเขียนกราฟ  $L_c$  และ  $\bar{\gamma}$  ซึ่งวิธีการทั้ง 2 มีหลักการดังนี้

- วิธีการเขียนกราฟความสัมพันธ์ของ  $K$  และ  $L_c$

หลักการของวิธีการคือการใช้ค่าความถี่ธรรมชาติของการสั่นที่วัดได้ของคานที่มีรอยร้าว 3 ความถี่แรก ค่า  $K_r$  ที่ได้จากงานวิจัยของ Ostachowicz, W. และ M. Krawczuk [13] และ Paipetis, S. และ A. Dimarogonas [17] แทนลงในสมการที่ (9) จุดตัดของค่าความถี่ทั้ง 3 ค่าเป็นจุดบอกตำแหน่งรอยร้าว ในกรณีของคานที่รองรับอย่างง่ายมีจุดตัด 2 จุดเนื่องคานเป็นแบบสมมาตรและสามารถคำนวณหาความถี่ของรอยร้าวได้จากค่า  $K$  อ่านได้จากกราฟความสัมพันธ์ของ  $K$  และ  $L_c$

- วิธีการเขียนกราฟความสัมพันธ์ของ  $L_c$  และ  $\bar{\gamma}$

หลักการของวิธีการคือการใช้ค่าความถี่ธรรมชาติของการสั่นที่วัดได้ของคานที่มีรอยร้าว 2 ความถี่แรก ค่า  $\bar{\gamma}$  ที่ได้จากงานวิจัยของ Ostachowicz, W. และ M. Krawczuk [13] และ Paipetis, S. และ A. Dimarogonas [17] แทนลงในสมการที่ (8) จัดสมการให้ด้านซ้ายมือของสมการอยู่ในรูป  $\bar{\gamma}$  แล้วพล็อตกราฟความสัมพันธ์ของ  $\bar{\gamma}$  และ  $L_c$  ของความถี่ทั้ง 2 ค่า จุดตัดของค่าความถี่ทั้ง 2 ค่าเป็นจุดบอก

ตำแหน่งรอยร้าว และสามารถคำนวณหาความถี่ของรอยร้าวได้จากค่า  $K$  ที่อ่านได้จากกราฟความสัมพันธ์ของ  $\bar{\gamma}$  และ  $L_c$

## 2.2 วิธีการที่ตั้งอยู่บนรูปร่างของโหมดการสั่น

วิธีการนี้ใช้ประโยชน์จากรูปร่างของการสั่นของโหมดต่าง ๆ เพื่อระบุความเสียหายบนโครงสร้าง คานและแผ่นบาง วิธีการนี้ได้มีการศึกษาโดยนักวิจัยดังนี้

ในช่วงแรกวิธีการระบุความเสียหายโดยการอาศัยรูปร่างของโหมด (Mode Shape) ของการสั่นใช้หลักการง่ายๆ คือการเปรียบเทียบรูปร่างการสั่น โดยมีชิ้นงานมาตรฐานที่ไม่มีรอยร้าวเป็นตัวเปรียบเทียบกับชิ้นงานที่ต้องการตรวจสอบความเสียหาย ต่อมา Tom Wolf และ Mark Richard [30] ได้เสนอวิธีการที่เรียกว่า Rank order of differences เพื่อใช้ระบุตำแหน่งความเสียหายโดยการใช้ผลต่างของ Mode shape ตำแหน่งต่างๆ บนคานของคานมาตรฐานกับคานที่ต้องการตรวจสอบความเสียหาย ตำแหน่งที่มีผลต่างของ Mode shape มีค่าสูงสุดของคือตำแหน่งที่เกิดรอยร้าว

Ahmed A. Elshafey, H. Marzouk และ M.R. Haddara [31] ได้พัฒนาวิธีการระบุความเสียหายโดยอาศัยรูปร่างของโหมด ซึ่งหลักการคล้ายกับวิธีการ Rank order of differences โดยใช้หลักการ Normalization ผลต่างรูปร่างของโหมดการสั่นของชิ้นงานที่ไม่มีรอยร้าวกับชิ้นงานที่มีรอยร้าวที่ตำแหน่งต่างบนชิ้นงาน ทำให้ได้ค่าอยู่ระหว่าง -1 ถึง 1 นำ มาเขียนกราฟ ตำแหน่งที่กราฟมีค่าเท่ากับ 1 หรือ -1 คือตำแหน่งที่มีรอยร้าว

H Chouiyakh, L Azrar, K Alnefaie, O Akourri [32] ได้ใช้วิธีการ Huang Hilbert Transform (HHT) เพื่อระบุตำแหน่งของรอยร้าว โดยใช้ค่าการกระจัดที่ตำแหน่งต่าง ๆ ในเวลาหนึ่ง ที่โหมดการสั่นต่าง ๆ กัน ทำให้ได้ค่า Instantaneous Frequency (IF) โดยที่บริเวณรอยร้าวค่า IF มีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วโดยมีค่าสูงหรือต่ำกว่าตำแหน่งรอบ ๆ รอยร้าวมากโดยที่สามารถสังเกตเห็นได้อย่างชัดเจน

## 2.3 วิธีการที่ตั้งอยู่บนรูปร่างของโหมดที่เกี่ยวข้องกับความโค้ง

วิธีการนี้เป็นการนำค่าที่ได้จากการกระจัด หรือ ค่าความเร็ว หรือ ค่าความเร่งของการสั่นของชิ้นส่วนโค้ง



สร้างทำการหาอนุพันธ์เพื่อทำการวิเคราะห์ความความโค้งของรูปร่างของโหมคการสั้น

A.K. Pandey, M. Biswas และ M. M. Samman [33] ได้ทำการนำเสนอตัวแปรใหม่ที่เรียกว่า Curve mode shape เพื่อระบุตำแหน่งของรอยร้าว โดยที่ Curve mode shape คือความสัมพันธ์ระหว่าง Flexural stiffness ของคานากับหน้าตัดของคาน A.K. Pandey, M. Biswas และ M. M. Samman ได้แบ่งคานออกเป็นช่วง ๆ และ Curve mode shape ที่ตำแหน่งจุดที่  $i$  บนคาน ที่โหมคการสั้นที่  $j$  ใด เขียนอยู่ในรูปสมการได้ดังนี้

$$w''_{i,j} = M / EI \quad (9)$$

โดยที่  $w'' = \frac{d^2w}{dx^2}$

$i =$  ตำแหน่งบนคาน  $i = 1, 2, \dots, N$

$j =$  โหมคของการสั้น  $j = 1, 2, \dots$

เมื่อ  $w =$  การกระจัด

$w'' =$  ความโค้งของการกระจัด

และ Curve mode shape เขียนอยู่ในรูปดังต่อไปนี้

$$w''_{i,j} = (w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j})h^2 \quad (10)$$

ผลต่างของ Curve mode shape คานที่ไม่มีรอยร้าวกับคานที่มีรอยร้าว เขียนอยู่ในรูปสมการได้ดังนี้

$$\Delta w''_{i,j} = w''_{i,j,c} - w''_{i,j,u} \quad (11)$$

เมื่อ  $\Delta w''_{i,j} =$  ผลต่างของ Curve mode shape

$w''_{i,j,c} =$  Curve mode shape ของคานที่มีรอยร้าว

$w''_{i,j,u} =$  Curve mode shape ของคานที่ไม่มีรอยร้าว

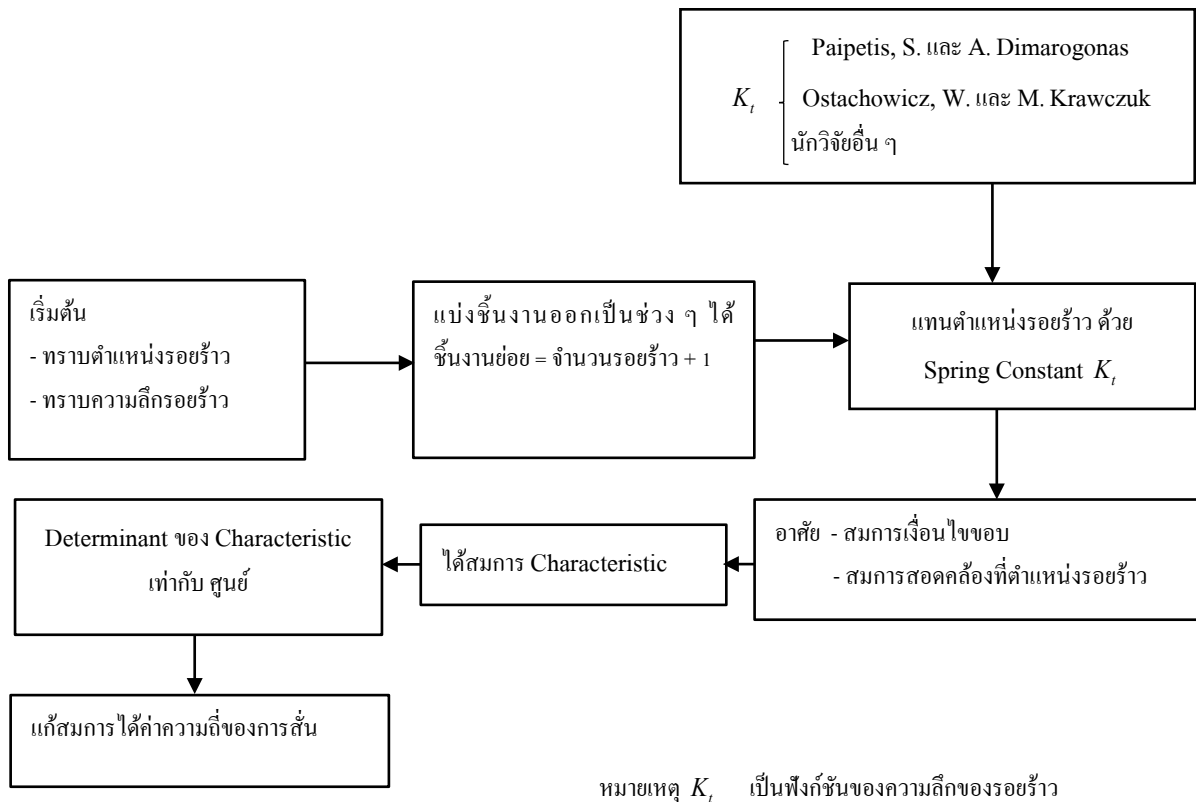
$h =$  ผลต่างระหว่างความยาวที่จุด  $i+1$  กับจุด  $i-1$

A.K. Pandey, M. Biswas และ M. M. ใช้ค่าสมบรูณ์ผลต่างของ Curve mode shape เพื่อระบุตำแหน่งของรอยร้าว โดยที่ตำแหน่งรอยร้าวผลต่างของ Curve mode shape มีค่าสูงสุด และต่อมาได้นำวิธีการ Fussy logic มาใช้กับผลต่างของ Curve mode shape เพื่อระบุตำแหน่งความเสียหาย

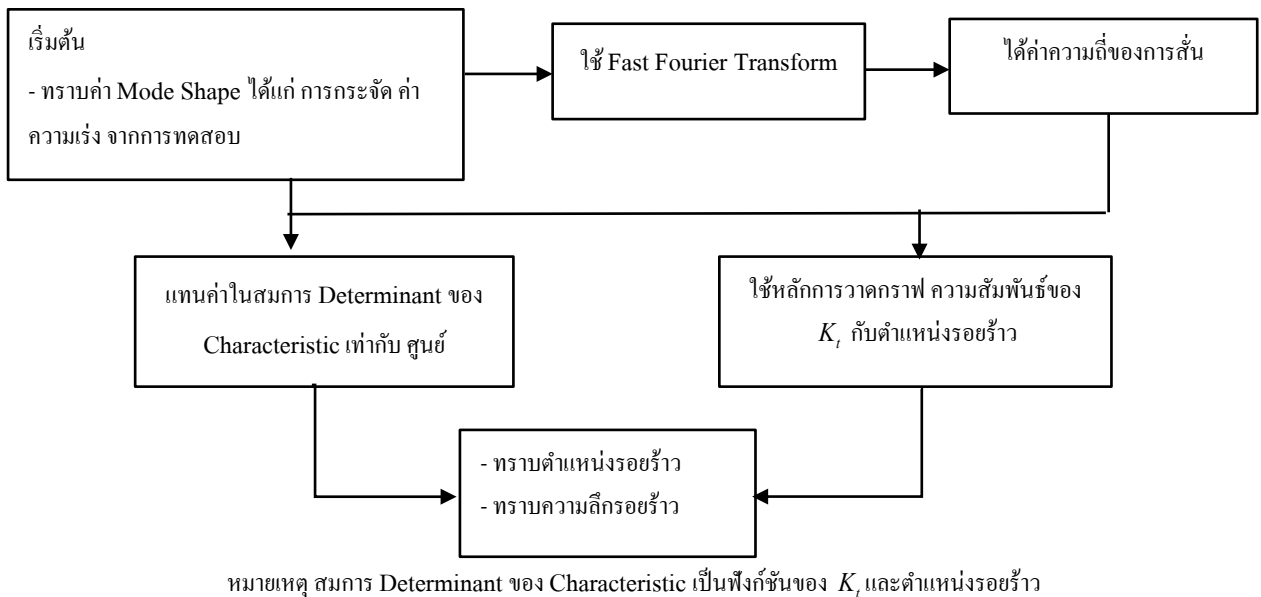
Erfan Asnaashari และ Jyoti K. Sinha [34] ได้นำเสนอวิธีการหาตำแหน่งรอยร้าวบนคานโดยการใช้หลักการ Normal Probability Plot โดยทำการแบ่งคานออกเป็นช่วงย่อย Normal Probability Plot ได้จาก Deviation from Normal Distribution (DND) ที่เป็นฟังก์ชันของ cumulative distribution function และ Inverse of Normal Cumulative Distribution Function ทำการหาอนุพันธ์อันดับ 2 ของ DND เพื่อใช้หาตำแหน่งรอยร้าว ผลลัพธ์ที่ได้จากค่าอนุพันธ์อันดับ 2 ของ DND พบว่าค่าอนุพันธ์อันดับ 2 ของ DND มีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วที่ตำแหน่งรอย

ในการระบุรอยร้าวบนโครงสร้างในบทความนี้แบ่งวิธีการระบุออกเป็น 3 วิธีการคือ วิธีการที่ตั้งอยู่บนพื้นฐานค่าความถี่ วิธีการที่ตั้งอยู่บนรูปร่างของโหมคการสั้น และวิธีการที่ตั้งอยู่บนรูปร่างของโหมคที่เกี่ยวกับความโค้ง ขั้นตอนการระบุตำแหน่งรอยร้าวโดยวิธีการที่ตั้งอยู่บนพื้นฐานค่าความถี่ วิธีการที่ตั้งอยู่บนรูปร่างของโหมคการสั้น และวิธีการที่ตั้งอยู่บนรูปร่างของโหมคที่เกี่ยวกับความโค้ง วิธีการเขียนอยู่ในรูปไดอะแกรม ดังแสดงในรูปดังแสดงในรูปที่ 1 รูปที่ 2 รูปที่ 3 รูปที่ 4 รูปที่ 5 และรูปที่ 6

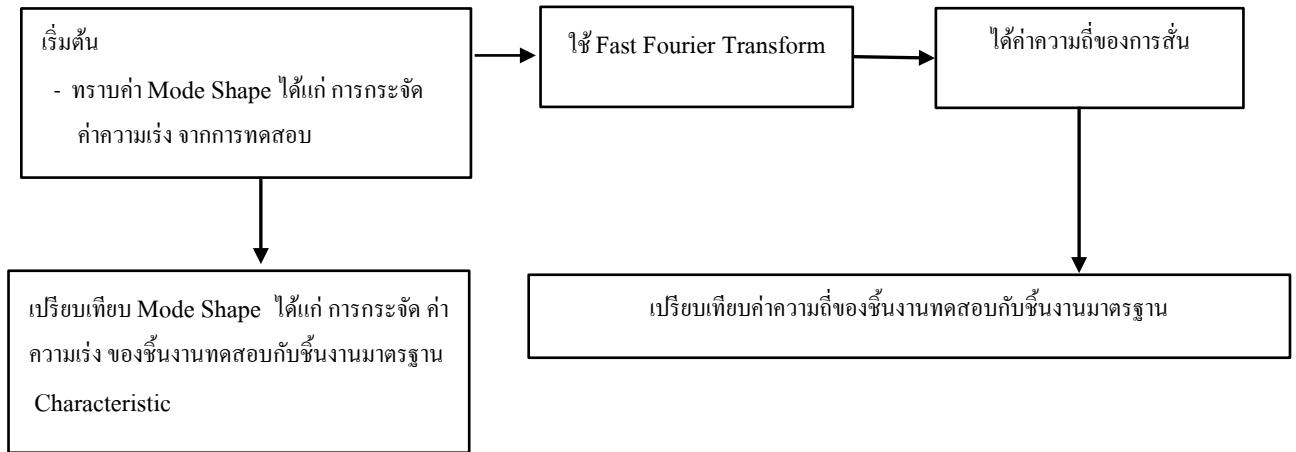
จากการวิเคราะห์วิธีการแต่ละวิธีการสามารถสรุปข้อดีเสียและตัวแปรที่มีความสำคัญต่อความแม่นยำของแต่ละวิธีการดังแสดงในตารางที่ 2 วิธีการที่ตั้งอยู่บนรูปร่างของโหมคที่เกี่ยวกับความโค้ง และวิธีการที่ตั้งอยู่บนรูปร่างของโหมคการสั้น ใช้ข้อมูลรูปร่างของโหมคการสั้นในการระบุตำแหน่งความเสียหายเหมือนกันแต่การเปลี่ยนแปลงรูปร่างของโหมคมีความอ่อนไหวต่ออนุพันธ์อันดับ 2 มากกว่า ซึ่งเห็นการเปลี่ยนแปลงที่ตำแหน่งรอยร้าวได้ชัดเจนกว่า ความแม่นยำของวิธีการที่ตั้งอยู่บนพื้นฐานค่าความถี่ขึ้นกับค่า spring constant ( $K_r$ ) ที่ได้จากการคำนวณซึ่งอาจไม่ตรงกับค่าที่เกิดขึ้นจริงบนชิ้นงานส่งผลให้การคำนวณมีความผิดพลาด



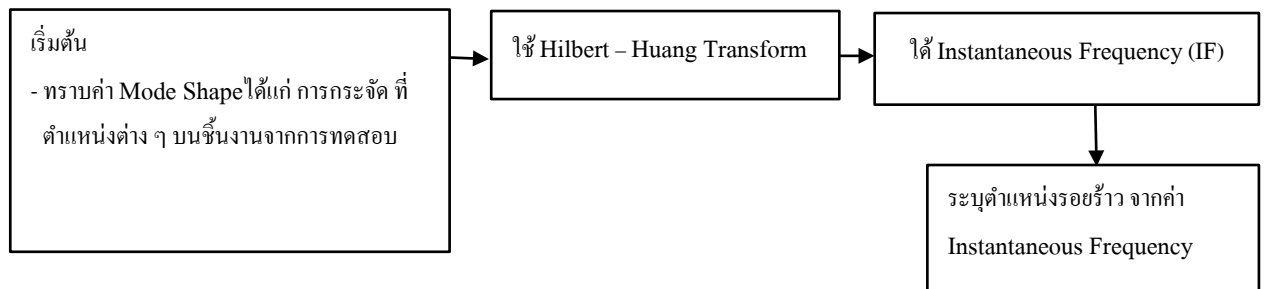
รูปที่ 1 ไคอะแกรมแสดงขั้นตอนวิธีการระบุการมีอยู่ของรอยร้าวโดยวิธีการที่ตั้งอยู่บนพื้นฐานค่าความถี่



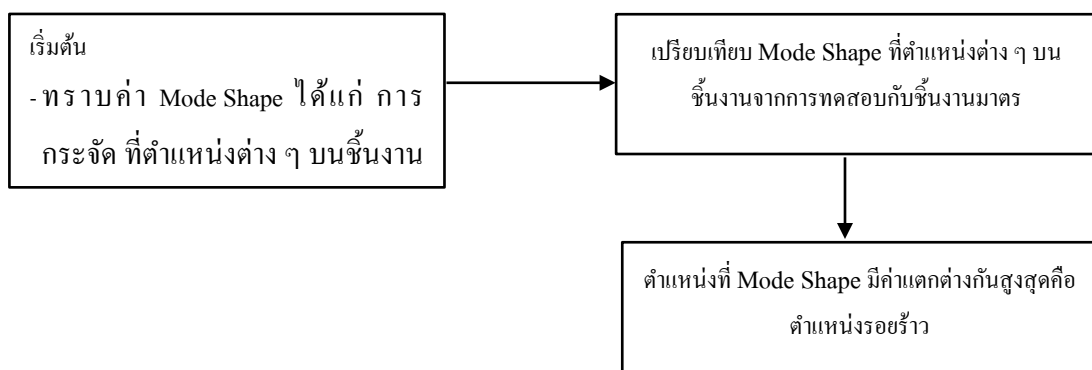
รูปที่ 2 ไคอะแกรมแสดงขั้นตอนวิธีการระบุตำแหน่งของรอยร้าวโดยวิธีการที่ตั้งอยู่บนพื้นฐานค่าความถี่



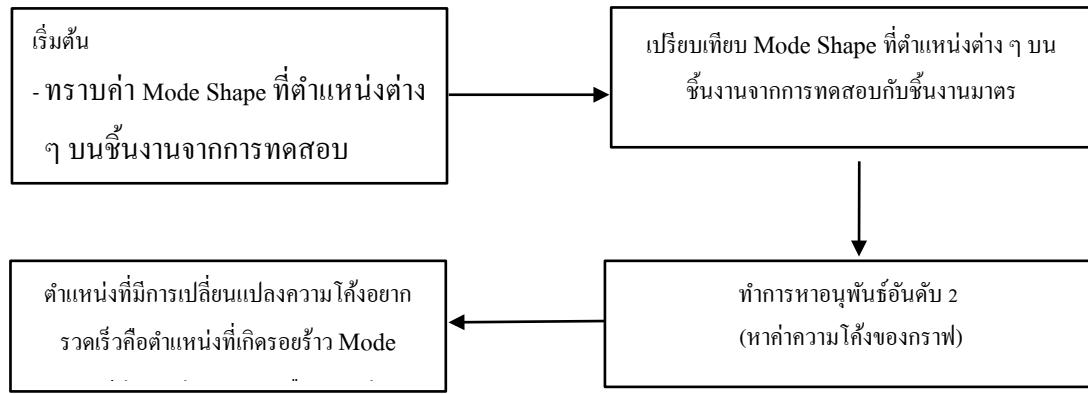
รูปที่ 3 ไดอะแกรมแสดงขั้นตอนวิธีการระบุการมีอยู่ของรอยร้าวโดยวิธีการที่ตั้งอยู่บนรูปร่างของโหมดการสั่น



รูปที่ 4 ไดอะแกรมแสดงขั้นตอนวิธีการระบุตำแหน่งของรอยร้าวโดยวิธีการที่ตั้งอยู่บนรูปร่างของโหมดการสั่น



รูปที่ 5 ไดอะแกรมแสดงขั้นตอนวิธีการระบุตำแหน่งของรอยร้าวโดยวิธีการที่ตั้งอยู่บนรูปร่างของโหมดการสั่น



รูปที่ 6 ไดอะแกรมแสดงขั้นตอนวิธีการระบุตำแหน่งของรอยร้าวโดยวิธีการที่ตั้งอยู่บนรูปร่างของโหนดที่เกี่ยวกับความโค้ง

ตาราง 2 เปรียบเทียบวิธีการที่ใช้ระบุตำแหน่งของรอยร้าว

วิธีการระบุตำแหน่งรอยร้าว	ตัวแปรสำคัญในการระบุตำแหน่งของรอยร้าว	ข้อดีของวิธีการ	ข้อเสียของวิธีการ	ความแม่นยำของวิธีการ
1. วิธีการที่ตั้งอยู่บนพื้นฐานค่าความถี่ (Frequency based Methods)	- ค่า Mode Shape ได้แก่ - การกระจัด - ความเร่ง - Spring Constant $K_s$	- สามารถระบุความถี่ของรอยร้าวได้	- เพิ่มขึ้นตอนในการคำนวณต้องเปลี่ยนค่า Mode Shape ให้อยู่ในรูปของค่าความถี่ของการสั่น - มีข้อจำกัดในการระบุจำนวนรอยร้าว	ความแม่นยำของวิธีการขึ้นอยู่กับตัวแปร 2 ตัวแปรคือ - ค่า $K_s$ - ค่าที่ได้จากการวัด Mode Shape ได้แก่ - การกระจัด - ความเร่ง
2. วิธีการที่ตั้งอยู่บนรูปร่างของโหนดการสั่น (Mode Shape based- Methods)	- ค่า Mode Shape ได้แก่ - การกระจัด - ความเร่ง	- ลดขั้นตอนการคำนวณโดยไม่ต้องคำนวณค่าความถี่ของการสั่น - สามารถระบุรอยร้าวได้จำนวนไม่จำกัด	- ไม่สามารถระบุความถี่ของรอยร้าวได้	ความแม่นยำของวิธีการขึ้นอยู่กับตัวแปร 1 ตัวแปรคือ - ค่าที่ได้จากการวัด Mode Shape ได้แก่ - การกระจัด - ความเร่ง
3. วิธีการที่ตั้งอยู่บนรูปร่างของโหนดที่เกี่ยวกับความโค้ง (Curved Mode Shape based- Methods)	- ค่า Mode Shape ได้แก่ - การกระจัด - ความเร่ง	- ลดขั้นตอนการคำนวณโดยไม่ต้องคำนวณค่าความถี่ของการสั่น - สามารถระบุรอยร้าวได้จำนวนไม่จำกัด	- ไม่สามารถระบุความถี่ของรอยร้าวได้	ความแม่นยำของวิธีการขึ้นอยู่กับตัวแปร 1 ตัวแปรคือ - ค่าที่ได้จากการวัด Mode Shape ได้แก่ - การกระจัด - ความเร่ง

4. สรุปผล (Conclusion)

การทบทวนบทความที่น่าสนใจเกี่ยวกับการระบุความเสียหายหรือรอยร้าวด้วยการวิเคราะห์การสั่น ในบทความนี้ได้

แบ่งวิธีการการระบุรอยร้าวในโครงสร้างโดยใช้วิธีการสั่นออกเป็น 3 แบบคือ วิธีการที่ตั้งอยู่บนพื้นฐานค่าความถี่ (Frequency based Methods) วิธีการที่ตั้งอยู่บนรูปร่างของ

โหมดการสั่น (Mode Shape based-Methods) วิธีการที่ตั้งอยู่บนรูปร่างของโหมดที่เกี่ยวกับความโค้ง (Curved Mode Shape based-Methods)

วิธีการที่ตั้งอยู่บนพื้นฐานค่าความถี่ เป็นวิธีการที่สามารถหาค่าความถี่ของคานและแผ่นบางที่มีรอยร้าวระบุตำแหน่งของรอยร้าวและความลึกของรอยร้าวได้ ซึ่งในการคำนวณตัวแปรที่สำคัญคือ ค่า stiffness spring ที่ตำแหน่งของรอยร้าว ความถูกต้องของคำตอบที่คำนวณได้ขึ้นอยู่กับ ค่า stiffness spring และพบว่าค่าความถี่ของที่คำนวณได้มีค่าสูงกว่าค่าที่ได้จากการทดลองเล็กน้อย ในกรณีของการคำนวณย้อนกลับโดยการใช้ค่าความถี่ที่ได้จากการทดลองคำนวณหาตำแหน่งรอยร้าวและความลึกของรอยร้าวผลลัพธ์ที่ได้มีความคลาดเคลื่อนจากตำแหน่งรอยร้าวจริงเล็กน้อย ซึ่งความคลาดเคลื่อนของคำตอบเกิดจากค่า stiffness spring ที่ตำแหน่งของรอยร้าว

วิธีการที่ตั้งอยู่บนโหมดการสั่นอาศัยหลักการของการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของโหมด ความแม่นยำของวิธีการขึ้นอยู่กับข้อมูลรูปร่างของโหมด ที่วัดได้ ซึ่งได้แก่การเปรียบเทียบการกระจัดที่แต่ละตำแหน่งบนคานที่มีรอยร้าวกับคานที่ไม่มีรอยร้าว และวิธีการที่นำค่าการกระจัดในแต่ละตำแหน่งใน 1 คาบเวลา แล้วเปลี่ยนอยู่ในรูป IF คำตอบที่ได้มาของวิธีการที่ตั้งอยู่บนโหมดการสั่น

วิธีการที่ตั้งอยู่บนรูปร่างของโหมดที่เกี่ยวกับความโค้ง เป็นวิธีการเป็นการระบุการมีอยู่ของรอยร้าวและระบุตำแหน่งของรอยร้าวโดยการใช้ข้อมูลอันดับที่ 2 ของผลต่างรูปร่างของโหมดของชิ้นงานที่มีรอยร้าวและชิ้นงานที่ไม่มีรอยร้าวที่ตำแหน่งต่าง ๆ บนชิ้นงาน ความถูกต้องของคำตอบขึ้นอยู่กับค่ารูปร่างของโหมดที่วัดได้

ผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีการที่ตั้งอยู่บนโหมดการสั่น ที่ได้จากการเปลี่ยนค่าการกระจัดที่แต่ละตำแหน่งในแต่ละโหมดแล้วเปลี่ยนอยู่ในรูปของ IF มีความแม่นยำกว่าผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีการที่ตั้งอยู่บนพื้นฐานค่าความถี่ เนื่องจาก ค่า IF เป็นการแปลงข้อมูลมาจากการกระจัดของรูปร่างของโหมดโดยตรง ส่วนวิธีการที่ตั้งอยู่บนพื้นฐานค่าความถี่ ต้องต้องอาศัยค่า Stiffness ของรอยร้าวซึ่งเป็นค่าที่ได้จากการคำนวณที่มีความ

คลาดเคลื่อนจากค่า Stiffness ในชิ้นงานจริง และผลลัพธ์ของวิธีการที่ตั้งอยู่บนรูปร่างของโหมดที่เกี่ยวกับความโค้งแสดงตำแหน่งรอยร้าวได้ชัดเจนกว่าผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีการที่ตั้งอยู่บนโหมดการสั่นที่ใช้วิธีการแบบ Rank order of differences แม้ว่าวิธีการทั้งสองใช้การกระจัดของรูปร่างของโหมดหาคำตอบแต่วิธีการที่ตั้งอยู่บนรูปร่างของโหมดที่เกี่ยวกับความโค้ง ใช้การหาอนุพันธ์อันดับที่ 2 ซึ่งมีความอ่อนไหวต่อค่าของการกระจัดมากกว่าซึ่งส่งผลให้แสดงตำแหน่งของรอยร้าวได้ชัดเจนกว่าดังนั้นสามารถสรุปได้ว่าวิธีการที่ตั้งอยู่บนรูปร่างของโหมดที่เกี่ยวกับความโค้ง มีความแม่นยำกว่าวิธีการที่ตั้งอยู่บนโหมดการสั่น และวิธีการที่ตั้งอยู่บนโหมดการสั่นมีความแม่นยำกว่าวิธีการที่ตั้งอยู่บนพื้นฐานค่าความถี่

### 5. ข้อเสนอแนะและการประยุกต์ใช้งาน

จากบททบทวนบทความพบว่าวิธีการทั้ง 3 วิธีการสามารถนำไปประยุกต์กับกับงานในกรณีต่าง ๆ กันเช่น ในกรณีที่ชิ้นงานมีขนาดเล็ก เช่น หัวอ่าน HardDisk หรือชิ้นงานดัดถูกปืน สามารถใช้วิธีการที่ตั้งอยู่บนวิธีการที่ตั้งอยู่บนพื้นฐานค่าความถี่ (Frequency based Methods) ในการตรวจสอบความเสียหายเนื่องจากชิ้นงานจำพวกนี้ในการซ่อมต้องเปลี่ยนทั้งชุดชิ้นงานไม่จำเป็นต้องระบุตำแหน่งความเสียหาย ส่วนในกรณีของตรวจสอบความเสียหายของเพลลา และคานวิธีการที่ตั้งอยู่บนรูปแบบการเคลื่อนที่ของชิ้นงานที่เกิดจากการสั่นและวิธีการที่ตั้งอยู่ตั้งอยู่บนความโค้งของรูปแบบการเคลื่อนที่ของชิ้นงานที่เกิดจากการสั่นมีความเหมาะสมในการนำมาใช้ระบุการมีอยู่ของรอยร้าวและตำแหน่งของรอยร้าว เพื่อทำการซ่อมแซมชิ้นงานให้สมบูรณ์

บทความทั้งหมดที่ได้ทบทวนยังมีเรื่องที่น่าสนใจที่สามารถพัฒนาต่อได้อีกดังนี้

1. การพัฒนาโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ เพื่อวิเคราะห์ความเสียหายโดยการสั่นให้มีการใช้งานที่ง่าย สามารถนำผลของความลึกของรอยร้าว เปลี่ยนอยู่ในรูปของ Stress intensity factor มีซึ่งมีผลต่อความแม่นยำของคำตอบ เนื่องจากว่าโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ในเชิงพาณิชย์ ยังไม่สามารถเปลี่ยนค่าความลึกของรอยร้าวไปเป็นค่า stress intensity factor ลงในตำแหน่งรอยร้าวได้ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จึงมีความคลาดเคลื่อน
2. พัฒนาวิธีการวิเคราะห์ความเสียหายของคานและแผ่นโดยการสั่นเพื่อนำไปวิเคราะห์ความเสียหายในรอยเชื่อม

## 6. กิตติกรรมประกาศ (Acknowledgment)

ขอขอบคุณ ดร. รั้งสรรค์ วรรณภพ ที่ช่วยสอนการใช้เครื่องมือทดสอบการสั่น และช่วยเขียนบทความขอขอบพระคุณ รศ. ดร. ชีร เจียศิริพงษ์กุล ที่ให้โอกาสทำวิทยานิพนธ์เกี่ยวกับการระบุความเสียหายโดยการวิเคราะห์การสั่น และช่วยดึงความสามารถทางด้านคณิตศาสตร์ขั้นสูงออกมาใช้ในการศึกษาเกี่ยวกับการสั่น

## 6. เอกสารอ้างอิง (Reference)

1. Dimarogonas, A., *Dynamic response of cracked rotors*. 1970, Internal report, General Electric Co., Schenectady NY.
2. Rytter, A., *Vibrational based inspection of civil engineering structures*. 1993, Dept. of Building Technology and Structural Engineering, Aalborg University.
3. Sun, Z., et al. *Crack defects detection in radiographic weldment images using FSVM and beamlet transform*. in *2009 Sixth International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery*. 2009. IEEE.
4. Nacereddine, N., et al., *Weld defect detection in industrial radiography based digital image processing*. *Transactions on Engineering Computing and Technology*, 2005. **2**: p. 145-148.
5. Wong, B.S., et al., *Crack detection using image processing techniques for radiographic inspection of aircraft wing spar*. *Insight-Non-Destructive Testing and Condition Monitoring*, 2011. **53**(10): p. 552-556.
6. Förster, F., *New findings in the field of non-destructive magnetic leakage field inspection*. *NDT international*, 1986. **19**(1): p. 3-14.
7. Lukyanets, S., et al., *Calculation of magnetic leakage field from a surface defect in a linear ferromagnetic material: an analytical approach*. *NDT & e International*, 2003. **36**(1): p. 51-55.
8. Kim, H.M., et al. *Detection method of cracks by using magnetic fields in underground pipeline*. in *2013 10th International Conference on Ubiquitous Robots and Ambient Intelligence (URAI)*. 2013. IEEE.
9. Rao, S.S., การสั่นทางกล. 2002, กรุงเทพฯ: บริษัท เพียร์สัน เอ็ดดูเคชั่น อินโดไชน่า
10. เจียศิริพงษ์กุล, ช., การสั่นสะเทือนทางกล. 2012.
11. Chondros, T. and A. Dimarogonas, *Dynamic sensitivity of structures to cracks*. 1989.
12. Gounaris, G. and A. Dimarogonas, *A finite element of a cracked prismatic beam for structural analysis*. *Computers & Structures*, 1988. **28**(3): p. 309-313.
13. Ostachowicz, W. and M. Krawczuk, *Analysis of the effect of cracks on the natural frequencies of a cantilever beam*. *Journal of sound and vibration*, 1991. **150**(2): p. 191-201.
14. Haisty, B. and W. Springer, *A general beam element for use in damage assessment of complex structures*. 1988.
15. Guan-Liang, Q., G. Song-Nian, and J. Jie-Sheng, *A finite element model of cracked plates and application to vibration problems*. *Computers & structures*, 1991. **39**(5): p. 483-487.
16. Krawczuk, M., *A rectangular plate finite element with an open crack*. *Computers & structures*, 1993. **46**(3): p. 487-493.
17. Paipetis, S. and A. Dimarogonas, *Analytical methods in rotor dynamics*. *Appl. Sci. London*, 1986. **14**: p. 49-57.
18. Christides, S. and A. Barr, *One-dimensional theory of cracked Bernoulli-Euler beams*. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1984. **26**(11-12): p. 639-648.
19. Shen, M.-H. and C. Pierre, *Natural modes of Bernoulli-Euler beams with symmetric cracks*. *Journal of sound and vibration*, 1990. **138**(1): p. 115-134.
20. Yoon, H.-I., I.-S. Son, and S.-J. Ahn, *Free vibration analysis of Euler-Bernoulli beam with double cracks*. *Journal of mechanical science and technology*, 2007. **21**(3): p. 476-485.
21. Rizos, P., N. Aspragathos, and A. Dimarogonas, *Identification of crack location and magnitude in a cantilever beam from the vibration modes*. *Journal of sound and vibration*, 1990. **138**(3): p. 381-388.

22. Israr, A., *Model for vibration of crack plates for use with damage detection methodologies*. Journal of Space Technology, 2011. **1**(1): p. 17-25.
23. Timoshenko, S.P. and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of plates and shells*. 1959: McGraw-hill.
24. Stahl, B. and L. Keer, *Vibration and stability of cracked rectangular plates*. International Journal of Solids and Structures, 1972. **8**(1): p. 69-91.
25. Yamuna, P. and K. Sambasivarao, *Vibration analysis of beam with varying crack location*. International Journal of Engineering Research and General Science, 2014. **2**(6): p. 1008-1017.
26. Chondros, T. and A. Dimarogonas, *Identification of cracks in welded joints of complex structures*. Journal of sound and vibration, 1980. **69**(4): p. 531-538.
27. Bamnios, Y., E. Douka, and A. Trochidis, *Crack identification in beam structures using mechanical impedance*. Journal of Sound and Vibration, 2002. **256**(2): p. 287-297.
28. Narkis, Y., *Identification of crack location in vibrating simply supported beams*. Journal of sound and vibration, 1994. **172**(4): p. 549-558.
29. Kindova-Petrova, D., *Vibration-based methods for detecting a crack in a simply supported beam*. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2014. **44**(4): p. 69-82.
30. Wolff, T. and M. Richardson. *Fault detection in structures from changes in their modal parameters*. in *Proceedings of the 7th international modal analysis conference*. 1989.
31. Elshafey, A.A., H. Marzouk, and M. Haddara, *Experimental damage identification using modified mode shape difference*. Journal of Marine Science and Application, 2011. **10**(2): p. 150-155.
32. Chouiyakh, H., et al., *Vibration and multi-crack identification of Timoshenko beams under moving mass using the differential quadrature method*. International Journal of Mechanical sciences, 2017. **120**: p. 1-11.
33. Pandey, A., M. Biswas, and M. Samman, *Damage detection from changes in curvature mode shapes*. Journal of sound and vibration, 1991. **145**(2): p. 321-332.
34. Asnaashari, E. and J.K. Sinha, *Crack detection in structures using deviation from normal distribution of measured vibration responses*. Journal of Sound and vibration, 2014. **333**(18): p. 4139-4151.